Algebra

Værktøjskasse

- Indfør passende variable.
- Opstil ligninger ud fra oplysningerne i opgaven.
- Hvis der er flere ligninger, så kombiner dem for at finde løsninger.
- Vurder de størrelser der indgår.

Eksempler

A. Indfør passende variable, opstil ligninger og løs dem
På julemandens værksted laver nisserne et lille spil hvor man skal placere et tal i hvert felt i et 3×3 kvadrat. Produktet af de tre tal i hver række og hver søjle skal være 1, og produktet af de fire tal i hvert 2×2 kvadrat skal være 2. Nisserne vil gerne skrive et tal i det midterste felt så der står et tal til at starte med. Hvilket tal skal de skrive der?

	?	

Løsning Indfør variable for hvert tal som vist på figuren.

a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

Nu udnytter vi oplysningerne til at opstille ligninger: Da produktet af de fire tal i hvert 2×2 kvadrat skal være 2, er

$$a_1 a_2 b_1 b_2 = 2, \quad a_2 a_3 b_2 b_3 = 2, \quad b_1 b_2 c_1 c_2 = 2, \quad b_2 b_3 c_2 c_3 = 2.$$

Ved at kombinere de fire ligninger og omskrive fås:

$$\begin{aligned}16 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= (a_1 a_2 b_1 b_2) \cdot (a_2 a_3 b_2 b_3) \cdot (b_1 b_2 c_1 c_2) \cdot (b_2 b_3 c_2 c_3) \\ &= (a_1 a_2 a_3) \cdot (b_1 b_2 b_3) \cdot (b_1 b_2 b_3) \cdot (c_1 c_2 c_3) \cdot (a_2 b_2 c_2) \cdot b_2\end{aligned}$$

Nu udnytter vi at produktet af de tre tal i hver række og hver søjle skal være 1, til at indse at hver af parenteserne i sidste linje er 1. Derfor er $b_2 = 16$, og der skal stå 16 på det markerede felt.

B. Vurder de størrelser der indgår
Løs ligningen

$$4x + 3\lfloor x \rfloor = 100,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end lig med x. (Fx er $\lfloor 4{,}34 \rfloor = 4$ og $\lfloor 9 \rfloor = 9$).

Løsning Det er svært at håndtere x og $\lfloor x \rfloor$ samtidig. Derfor vurderer vi først hvor stor $\lfloor x \rfloor$ er. Da $\lfloor x \rfloor \leq x$, er

$$7\lfloor x \rfloor \leq 100 \leq 7x.$$

Ved at dividere med 7 ses at

$$\lfloor x \rfloor \leq 14 + \frac{2}{7} \leq x.$$

Altså er $\lfloor x \rfloor = 14$ da $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end lig med x. Når vi indsætter det i den oprindelige ligning fås

$$4x + 3 \cdot 14 = 100,$$

og dermed

$$x = \frac{100 - 42}{4} = \frac{29}{2}$$

som eneste løsning. (Bemærk at dette faktisk er en løsning da $\lfloor \frac{29}{2} \rfloor = 14$).

Opgaver

Opgave 1 Når tre tal lægges sammen to og to, fås resultaterne 38, 44 og 52. Hvad er det største af de tre oprindelige tal?

Opgave 2 Om ti tal vides at gennemsnittet af de ni mindste tal er 8, og gennemsnittet af de ni største tal er 10. Hvad er forskellen mellem det største af de ti tal og det mindste det mindste af de ti tal?

Opgave 3 Tre kammerater A, B og C har tilsammen 120 kroner. Først giver A lige så mange penge til B som B har i forvejen. Dernæst giver B lige så mange penge til C som C har i forvejen. Til sidst giver C lige så mange penge til A som A nu har. Efter disse transaktioner har A, B og C lige mange penge. Hvor mange penge havde hver af de tre kammerater oprindelig?
(Georg Mohr-Konkurrencen 1993)

Opgave 4 En fisker har fanget et antal fisk. De tre tungeste udgør tilsammen 35% af fangstens samlede vægt. Dem sælger han. Herefter udgør de tre letteste tilsammen $\frac{5}{13}$ af vægten af resten. Hvor mange fisk fangede han?
(Georg Mohr-Konkurrencen 1999)

Opgave 5 Om de tre tal a, b og c oplyses at

$$a+2b \leq 3c, \quad b+2c \leq 3a, \quad c+2a \leq 3b.$$

Bevis at $a = b = c$.

Opgave 6 Bestem alle reelle talsæt (x, y, z) som opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} xy &= z, \\ xz &= y, \\ yz &= x. \end{aligned}$$

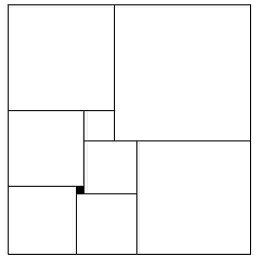
(Georg Mohr-Konkurrencen 1996)

Opgave 7 Løs ligningen

$$x^5 + \lfloor x \rfloor = 20,$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største hele tal mindre end lig med x.
(Georg Mohr-Konkurrencen 2003)

Opgave 8 Om et rektangel oplyses at det kan deles op i ni kvadrater der er placeret som vist i forhold til hinanden. Det sorte kvadrat har sidelængde 1. Er der mere end én mulighed for rektanglets sidelængder?



(Georg Mohr-Konkurrencen 2012)

Opgave 9 Et tog gennemkører en bestemt strækning med en konstant fart. Hvis farten sættes op med 10 kilometer i timen, kan turen gøres 40 minutter hurtigere. Hvis farten derimod sættes ned med 10 kilometer i timen, tager turen 1 time længere. Hvor lang er den gennemkørte strækning?
(Georg Mohr-Konkurrencen 1994)

Løsninger

Opgave 1 De tre tal betegnes a, b og c så $a \le b \le c$. Dermed er $a+b=38$, $a+c=44$ og $b+c=52$. Nu kombinerer vi de tre ligninger:

$$2c=(a+c)+(b+c)-(a+b)=44+52-38=58.$$

Altså er det største tal $c=\frac{58}{2}=29$.

Opgave 2 Summen af de ni mindste tal er $8\cdot 9=72$, og summen af de ni største tal er $10\cdot 9=90$. Derfor er det største af de ti tal minus det mindste det mindste af de ti tal lig med $90-72=18$.

Opgave 3 Oprindelig har A, B og C henholdsvis a, b og c kroner. Fordelingen (a,b,c) ændres først til $(a-b,2b,c)$, dernæst til $(a-b,2b-c,2c)$ og sluttelig til $(2(a-b),2b-c,2c-(a-b))$. Til slut har A, B og C lige mange penge, dvs. 40 kroner hver. Altså er

$$\begin{aligned}40&=2(a-b),\\40&=2b-c,\\40&=2c-(a-b).\end{aligned}$$

Dermed er $a-b=20$, og vi får

$$\begin{aligned}c&=\frac{1}{2}(40+(a-b))=30,\\b&=\frac{1}{2}(40+c)=35,\\a&=b+20=55.\end{aligned}$$

Opgave 4 De tre letteste udgør $\frac{5}{13}$ af 65%, dvs. $\frac{5\cdot 65}{13}\%=25\%$ af hele fangsten. De mellemste fisk udgør dermed $100\%-(35\%+25\%)=40\%$ af fangsten. I mellemgruppen må der følgelig være mindst fire fisk (da de tre tungeste kun vejer 35% tilsammen). På den anden side kan der heller ikke være mere end fire fisk i mellemgruppen: Hver mellemfisk vejer jo nemlig mindst så meget som gennemsnittet af de tre letteste fisk, altså mindst $\frac{1}{3}\cdot 25\%=8\frac{1}{3}\%$, og fem mellemfisk ville dermed tilsammen veje over 40%. Altså er der præcis fire fisk i mellemgruppen, og dermed i alt $3+4+3=10$ fisk.

Opgave 5 Antag at de tre tal ikke alle er lig hinanden, og at a er mindst (evt. lig med enten b eller c). Da er $a\le b$ og $2a\le 2c$ hvor der ikke kan gælde lighedstegn i begge uligheder. Derfor er

$$3a=a+2a<b+2c,$$

hvilket er umuligt. Dermed må de tre tal være lig med hinanden.

Opgave 6 Multiplikation af de tre ligninger med hinanden giver

$$(xyz)^2=xyz.$$

Heraf følger at $xyz=0$ eller $xyz=1$. Hvis $xyz=0$, er mindst et af tallene lig med 0, og det følger så af det oprindelige ligningssystem at de alle er lig med 0.

Hvis $xyz=1$, er alle tre tal forskellige fra 0, og vi kan gange ligningerne igennem med henholdsvis z, y og x, hvorved ligningssystemet bliver ensbetydende med

$$x^2=y^2=z^2=1.$$

Så er $(x,y,z)=(\pm1,\pm1,\pm1)$, hvor det negative fortegn må optræde et lige antal gange på grund af betingelsen $xyz=1$. Samtlige løsninger til ligningssystemet er altså at finde blandt talsættene $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$ og $(-1,-1,1)$. At alle disse faktisk er løsninger, ses ved at gøre prøve i det oprindelige ligningssystem. Hermed er den fuldstændige løsning bestemt.

Opgave 7 Hvis $x\le 1$, er

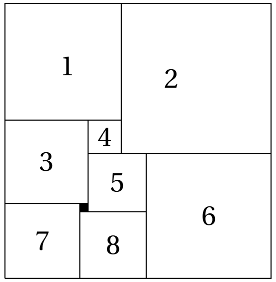
$$x^5+\lfloor x\rfloor\le 1^5+1=2,$$

og hvis $x\ge 2$, er

$$x^5+\lfloor x\rfloor\ge 2^5+2=34.$$

Enhver løsning må derfor ligge i intervallet $]1;2[$. For $x\in]1;2[$ er $\lfloor x\rfloor=1$, altså reduceres ligningen i dette interval til $x^5=19$ som har løsningen $x=\sqrt[5]{19}$. Da $1^5<19<2^5$, må $\sqrt[5]{19}\in]1;2[$, og dermed er $x=\sqrt[5]{19}$ også løsning til den oprindelige ligning.

Opgave 8 Nummerer kvadraterne fra 1 til 8 som vist på figuren (det sorte kvadrat får intet nummer). Sidelængden i kvadrat i betegnes x_i. Vi udtrykker nu sidelængderne af kvadraterne ved sidelængden af kvadrat nummer 5. Af figuren ses:



$$\begin{aligned}
x_8 &= x_5+1,\\
x_7 &= x_8+1=(x_5+1)+1=x_5+2,\\
x_3 &= x_7+1=(x_5+2)+1=x_5+3,\\
x_4 &= x_3-(x_5-1)=(x_5+3)-(x_5-1)=4,\\
x_1 &= x_3+x_4=(x_5+3)+4=x_5+7,\\
x_2 &= x_1+x_4=(x_5+7)+4=x_5+11,\\
x_6 &= x_5+x_8=x_5+(x_5+1)=2x_5+1.
\end{aligned}$$

Af figuren ses at $x_5+x_6=x_2+x_4$. Heraf fås ligningen $x_5+(2x_5+1)=(x_5+11)+4$, hvis løsning er $x_5=7$. Hermed bliver alle kvadraters sidelængder kendte, og dermed er der kun én mulighed for rektanglets sidelængder.

Opgave 9 Kaldes farten (målt i kilometer i timen) for v, strækningen (målt i kilometer) for s og tiden (målt i timer) for t, får vi følgende tre relationer:

$$\begin{aligned}
s &= tv,\\
s &= (t-\frac{2}{3})(v+10)=tv+10t-\frac{2}{3}v-\frac{20}{3},\\
s &= (t+1)(v-10)=tv+v-10t-10.
\end{aligned}$$

Ved at erstatte s med tv kan vi omskrive de to sidste ligninger til

$$\begin{aligned}
10t-\frac{2}{3}v &= \frac{20}{3}\\
-10t+v &= 10.
\end{aligned}$$

Dette ligningssystem løses: Ved at lægge de to ligninger sammen fås $\frac{1}{3}v=\frac{50}{3}$, altså $v=50$, og derefter findes t vha. den nederste ligning til $t=4$. Den gennemkørte strækning er dermed $4\cdot 50=200$ kilometer.